בחינה באלגברה 1מ' -104016- סמסטר אביב תש"ס

משך הבחינה : 3 שעות.
יש לענות על כל השאלות.
יש לנמק כל תשובה נימוק מלא (מלבד שאלה 6).
יש לרשום כל תשובה סופית במשבצת המיועדת לכך.
אין להשתמש בכל חומר עזר, כולל מחשבונים.

ב ה צ ל ח ה !

נא למלא את כל הפרטים הבאים :

שם משפחה	
שם פרטי	
קבוצת הרצאה	
קבוצת תרגול	
פקולטה	
מס. סטודנט	

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
סה"כ	

<u>שאלה מס. 1</u> (10%)

מצאו את כל המספרים המרוכבים z המקיימים

$$(5-5i)\ z^4 = (3-i)(1+2i)$$

<u>שאלה מס. 2</u> : (20%)

תהא
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^t AP = D$.

P=

D=

<u>שאלה מס. 3</u> : (20%)

יהא $V=\{a+bx+cx^2+dx^3\}$ מרחב הפולינומים ממעלה ≥ 3, ותהא $T:V\to V$ הטרנספורמציה הלינארית הניתנת ע"י

$$Tf(x)=f(0)\cdot(x^3-x^2)\ +\ (x^2+x+1)\,f''(x)-(x+1)\,f'(x)$$

באשר $f''(x)$ הנגזרת של $f(x)$, $f''(x)$ הנגזרת השניה.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס $S=\{1,x,x^2,x^3\}$

ב. מצאו את מטריצת המעבר B מהבסיס $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ לבסיס $B=\{p(x),\ p(x)+x,\ x^2,\ p(x)+x^3\}$ באשר $p(x)=1+x+x^2+x^3$.

ג. מצאו את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B.

א. $[T]_s =$

ב. $B =$

ג. $[T]_B =$

<u>שאלה מס. 4</u> : (20%)

תהא
$$A=\begin{pmatrix} 3-a-b-c & a+b-1 & c-1 \\ 4-2a-b-2c & 2a+b-1 & 2c-2 \\ 1-a-b-c & a+b-1 & c+1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את הפולינום האופייני של A .

ב. עבור איזה ערכים ממשיים a,b,c ניתן ללכסן את A ?

א. הפולינום האופייני $P_A(x) =$

ב. ניתן ללכסון את A עבור a,b,c המקיימים :

<u>שאלה מס. 5</u> : (10%)
עליכם לקבוע אם הטענות הבאות נכונות. אם הטענה נכונה עליכם להוכיחה. אם היא איננה נכונה יש להביא דוגמא נגדית.

א. לא קיימת מטריצה מדרגה 3 עם פולינום אופייני $x^7 - x^5 + x^3$.

ב. אם $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $T^2 = 0$ $(T^2 = TT)$ אזי
$\operatorname{Im} T = \ker T$

<u>שאלה מס. 6</u> : (20%)
יש לענות ב"נכון" או "לא נכון" ע"י מילוי המשבצת המתאימה.
(בשאלה זו, אין צורך לנמק את התשובה)

	נכון	לא נכון
א. A מטריצה $n\times n$ וידוע כי דרגת $A-4\cdot I$ קטנה מ- n, אזי דרגת $A^2-A-12\cdot I$ קטנה מ- n.		
ב. A מטריצה $n\times m$, B מטריצה $m\times n$, $I_n = A\cdot B$, אזי $I_m = B\cdot A$		
ג. A מטריצה ממשית 3×3, i הינו ערך עצמי של A, והעקבה של A הינה 1, אזי הדטרמיננטה של A הינה 1.		
ד. P מטריצה הפיכה, $B=P^{-1}AP$, אזי u וקטור עצמי של A אם ורק אם Pu וקטור עצמי של B		
ה. V מרחב וקטורי עם בסיס $u_1,\cdots,u_n$ מעל R, אזי ניתן להגדיר מכפלה פנימית על V כך ש $u_1\cdots u_n$ בסיס אורתונורמלי של V.		